Шифр: 9-24

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап

по математике

2019/2020

Ленинградская область

Район Гатчинский

Школа МБОУ „Гатчинский лицей №3"

Класс 9

ФИО Кудяков Макар Александрович

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	0	0	21

9.1 Да, может.

Малыш будет делать так. Для удобства разбелим кучки на пары (по кол-ву конфет изначально): 1-9, 2-8, ..., 4-6, ещё 5 и 10. Начиная с 1-ой минуты, т.е. нечётной, он будет брать в каждой паре большее число $x \to x-5, 5$ (по разбиению все больше 5). А на чётной след. минуте брать меньшее из этой же пары $10-x \to (10-x)+(x-5)=5$ (по разбиению в каждой паре сумма всех конф. = 10). Тогда, когда пары кончатся, будет 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 10. Пары кончаются после чётной минуты => сейчас нечётная, и Малыш поступает так: $10 \to 5, 5$. Тогда получим все кучки с равным 5 кол-вом конфет, что подходит под условие.

Ответ: да, может.

9.3 Разобьём клетки на пары, предварительно закрасив поле в 2 цвета (рис.: пары - клетки с одинаковыми номерами)

1		2		3		4	
	1		2		3		4
5		6		7		8	
	5		6		7		8
9		10		11		12	
	9		10		11		12
13		14		15		16	
	13		14		15		16

Все пронумерованные клетки одного цвета (I), остальные другого (II).

Заметим, что Дима должен покрывать клетки разных цветов.

Выиграет Коля (т.е. имеет выигр. стратегию). Он будет поступать так:

Очевидно, что Дима своим ходом будет покрывать одну из пронумерованных клеток. Тогда Коля будет зачёркивать клетку (ставить крест) с тем же номером, но другую. Дима больше не сможет ставить домино на эти клетки с номером, т.к. на одну уже ставил, а другая может идти только в паре с соседней, на которых нет крестов (т.е. суммарно 1 - неч.), т.к. Коля по стратегии туда не ставит

Стратегия работает, т.к. Дима начинает и пара ходов Димы, Коли подряд „убирает" одну пару клеток с одинак. номерами.
Пары когда-нибудь закончатся => Дима не может сделать ход (все клетки этого цвета кончились) а по стратегии Коля всегда может ход после Димы, т.е. Дима ходит и не может сделать ход => он проиграл.

Ответ: Коля имеет выигрышную стратегию

$\boxed{9.2}$ ~~[illegible]~~ n_{max} = ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ 202

Предположим, что это ~~не~~ так. Тогда есть пример на > 202 ч., т.е. $\geq$ ~~[illegible]~~ 203 чисел.
Пусть это числа $a_1, \dots, a_n$: $a_1 < \dots < a_n$:

$|a_l - a_i| \geq 10$ по условию => ~~[illegible]~~ $a_n \geq a_1 + 202 \cdot 10$
~~[illegible]~~ $a_{n-1} \geq a_2 + 200 \cdot 10$
~~[illegible]~~ $a_{n-2} \geq a_3 + 1980 \cdot$ ~~[illegible]~~

Рассмотрим a_{n-2} и a_3. Они по модулю (хотя бы одно) ≥ 990,
т.к. иначе

$-990 \quad 0 \quad 990$ они в промежутке ~~[illegible]~~ $(-990; 990)$ =>

=> их разность $< 990 \cdot 2 = 1980$, что противоречит $a_{n-2} \geq a_3 + 1980$.

Не умаляя общности рассмотрим $|a_3| \geq 990$ (т.к. рассматр. сумма кв-тов, а кв-т зависит только от модуля числа). $a_1 < a_2 < a_3$ =>
=> $|a_1| \geq 1010$, $|a_2| \geq 1000$

Тогда $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq 1010^2 + 1000^2 + 990^2 = 1000^2 + (1000+10)^2 + (1000-10)^2 =$
$= 3 \cdot 1000^2 + 200 = 3000\,000 + 200 > 3000\,000$. $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 3000\,000$. Противоречие.
Предположение неверно. Чисел ≤ 202.

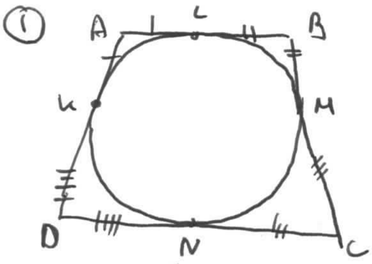
Для д-ва максимальности нужен ещё пример:

1005, 995, ..., 5, −5, ..., −1005. Числа отличаются на 10 (соседние).
Всего чисел 202. А сумма кв-тов трёх наиб. или трёх наим.:
$1005^2 + 995^2 + 985^2 = (-1005)^2 + (-995)^2 + (-985)^2 = 995^2 + (995+10)^2 + (995-10)^2 =$
$= 3 \cdot 995^2 + 200 = 990025 \cdot 3 + 200 = 2970125 + 200 = 2\,970\,325 < 3000\,000$

Условие выполняется => пример верен => + оценка наиб. $n = 202$.

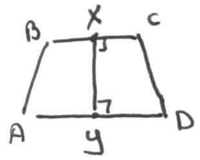
Ответ: $n_{наиб.} = 202$

9.5 Рассмотрим два случая: AB ∥ CD ① и нет ②

① 

Тогда искомая ср. линия $EF \overset{(св\text{-}во)}{=} \frac{AB+DC}{2}$

Рассмотрим диаметр: очевидно, есть такой, который $\perp AB$ и $\perp DC$:



~~Тогда в одной стороне~~
~~XY ≤ AB + BA + ...~~
~~XY ≤ AB + CD ...~~
~~2XY ≤ AB + BC + CD + AD.~~

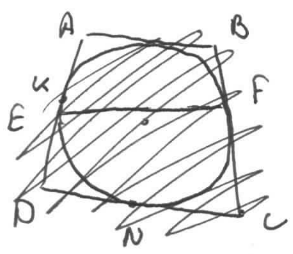
~~ABCD — впис. (св-во) ...~~

XY расст. между BC и AD — параллельные. =>

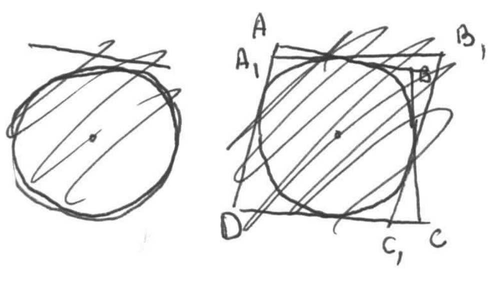
=> $XY \le BA$, $XY \le CD$ (св-во., т.к. B и A, C и D лежат на этих ~~...~~ паралел. прямых). Тогда $2XY \le BA + CD$.

ABCD — впис. $\overset{(св\text{-}во)}{\Rightarrow}$ $BA + CD = AB + DC$; $XY \le \frac{BA+CD}{2} = \frac{AB+CD}{2} = EF$. Ч.Т.Д.

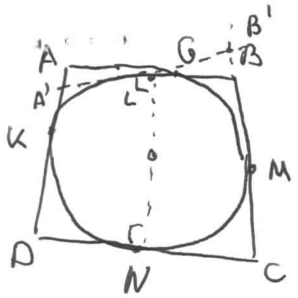
② $AB \nparallel CD$. Заметим, что если $AD \parallel BC$, то диаметр и ср. линия будут равны (это расстояния между параллельными AD и BC, т.е. равны). Тогда н-во выполняется. Рассмотрим $AD \nparallel BC$.



~~KN верхн. Нижняя~~
~~K, N — точки кас. ω с AD, DC соотв.~~
Тогда ~~проведем диаметр~~ и ~~через вторые концы касательные~~ ~~прямые к AD, DC соотв.~~



~~Получим сейчас новый четырёхуг. $A_1B_1C_1D$.~~



Пусть $\omega \cap DC = N$, $\omega \cap AD = K$, $\omega \cap BC = M$

Проведем диам. через N. (пусть LN

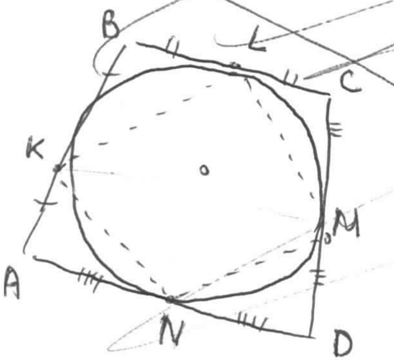
~~Точка стоящая~~

Тогда $L \in \cup KG$ или $L \in \cup GM$, $G \neq L$ ($G = AD \cap \omega$)

Не умаляя общности $L \in \cup KG$.

~~Сто~~ С точками $KLMN$ получим новый четырех уг. $A'_*B'CD$.

~~Рассмотрим четырёх уг. ABCD с серединами~~



~~K, L, M, N сост. (рис)~~

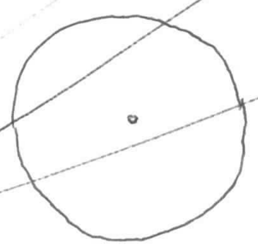
~~Обозначим~~ ~~KLMN - паралл. (св-во)~~

~~Остается д-ть, что диагональ паралл. KLMN~~

~~≥ диаметра окр.~~

~~Пусть ~~нет~~ не так.~~

~~Тогда~~



Нетрудно заметить, что при „перемещении" $G \to K$,

$A \to A'$, $B^* \to B'$. Средняя линия только уменьшается, а

в случае L всё выполнется

Шифр: 2-9-01

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Гатчинский

Школа МБОУ „Гатчинский лицей №3"

Класс 9

ФИО Кудяков Макар Александрович

2-9-01

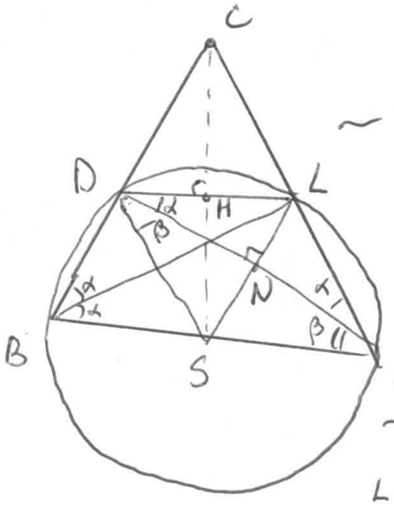
6	7	8	9	10	Σ
7	7	7	7	0	28

9.8

Дано: условие

Найти: $\angle ABC$

Решение:



Пусть $\angle ABC = 2\alpha$.

~ Тогда $\angle LAD = \angle LBD = \alpha$ как впис. на одну дугу (св-во); по этому же $\angle LDA = \angle LBA = \alpha$.

~ Пусть $\angle DAB = \beta$

~ $\angle LDB + \angle LAB = 180°$ (св-во впис. ABDL); $\angle LDB = 180° - \alpha - \beta$

~ $\angle CDL + \angle LDB = 180°$ (св-во смежн. $\angle$) $\Rightarrow \angle LDC = \alpha + \beta$.

~ $CS \cap DL = H$; $\triangle CHD = \triangle DHS$ по двум катетам (DH общ.; CH = HS - усл.) $\Rightarrow$ соотв. эл. равны: $\angle LDS = \angle CDL = \alpha + \beta$; $\angle SDA = \beta$, т.к. $\angle LDS = \angle LDA + \angle ADS$.

~ $\triangle ADS$ - равноб. (пр-к) ($\angle D = \angle A = \beta$) $\Rightarrow DS = SA$; $\triangle ALD$ - равноб. (пр-к) ($\angle D = \angle A = \alpha$) $\Rightarrow DL = LA$;

ALDS - дельтоид (опр) ($DL = LA$, $SA = DS$) $\xRightarrow{(св-во)}$ $LS \perp DA$: $LS \cap DA = N$

~ $\angle CLD$: смежный с $\angle DLA$, который в ABDL (впис.) $\Rightarrow \angle CLD = 180° - \angle DLA = \angle DBA = 2\alpha$.

~ $\triangle CHL = \triangle LHS$ по двум катетам (HL - общ., CH = HS по усл.) $\Rightarrow$ соотв. эл. равны: $\angle CLH = \angle SLH = 2\alpha$

~ В $\triangle DNL$: $\angle D + \angle L = 90°$ (св-во); $\alpha + 2\alpha = 90°$; $\alpha = 30°$.

$\angle ABC = 2\alpha = 60°$.

Ответ: $\angle ABC = 60°$.

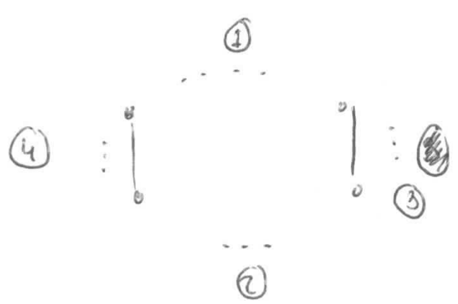
Зелёные (изнач.), т.е. те, которые изначально были зелёные

9.7 Наибольшее кол-во изнач. : 1010.

Д-жем, что больше нельзя. Расставим их по порядку их опрашивания.
Для этого рассмотрим, что пусть (изнач.) два зелёных хамелеона стояли рядом. Каждый зелёный (изнач.) хамелеон говорит число n = (кол-во (изнач.) зел.) + (коричн. (изнач.) до него), т.к. это все зелёные хамелеоны на данный момент.
Тогда для зел., зел. это число одинаково => они назвали равные числа.
Но хамелеонов 2019 и разл. чисел 2019 => не было двух с одинак. числами. Противоречие. Тогда между любыми (изнач.) зел. хамелеонами хотя бы по ещё одному.
Пусть их > 1010 => их хотя бы 1011. Тогда рассмотрим самых близких зелёных (изнач.): между ними хотя бы по 1 коричн. (изнач.). Тогда 3. ≥ 1к. 3. ≥ 1к. 3... 3.
хамелеонов $\geq 1011 + 1010 = 2021$. Противоречие. Неверно. Зеленых изнач. ≤ 1010.
Для д-ва максимальности 1010 нужен пример на 1010:
пусть опрашивали 3К3К3...3 (зеленых 1010, кор. 1009). Тогда
каждый зелёный называл числа 1010, 1011 (+кор. до него) > 1012 (+2 кор. до него) ... > 2019 (+1009 кор. до него)
А коричневые пусть назвали от 1 до 1009, т.к. это всегда ложь ($\cancel{\text{кол}}$ зел. ≥ 1010)
Получили все числа от 1 до 2019. Пример верный. 1010 зел. (изнач.) - макс.

Ответ: 1010.

9.9. Д-жем, что не может.
Пусть может.
Для начала рассмотрим такой n-уг. и один из хороших, а точнее, пар из его параллельных сторон:



Поскольку n-уг. правильный, то в силу симметрии стороны параллельны тогда и только тогда на участках ① и ② равное кол-во точек. (вершин n-уг.)

Также заметим, что теперь все многоуг., получившиеся при разбитии в частях ③, ④ не будут пересекаться с остальными (кроме рассматр. параллельных сторон). Значит, достаточно д-ть, что в части с ① по ② нельзя разбить.

Пусть можно разбить на m-уг.

Лемма. Если есть дуга, отделённая стороной (или диаг.) (рис.)

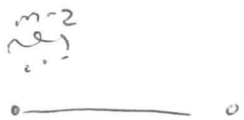
, то для разбития на m-уг. нужно на этой ~~дуге~~ дуге $\vdots(m-2)$ точек (вершин) (кроме тех, которые принадлежат стороне (или диаг.)). (Рассматриваются вершины прав. n-уг.)

По индукции:

База для $\le m-2$ очев.: если $< m-2$, то просто не хватает вершин., если $= m-2$, то как раз всего m вершин и пример очевиден.

Шаг Пусть до k всё верно. Д-жем для k (2 случая): I $k \,\vdots\, m-2$, II $k \,\not\vdots\, m-2$

I. $k \,\vdots\, m-2$. Берем первые $m-2$ вершин



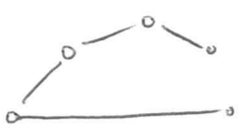
~~Расходящ. очевидно~~ легко взять m-уг.:

здесь остается $k-(m-2) \,\vdots\, m-2 \Rightarrow$

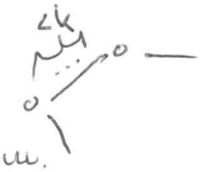
$\Rightarrow$ по предположению можно разбить: $k-(m-2) < k$.

теперь это как сторона (или диаг.)

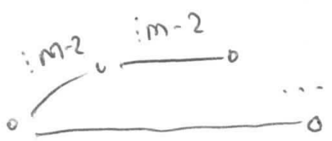
II. $k \,\not\vdots\, m-2$. Пусть можно. Рассмотрим m-уг. со стороной изнач. стороны (или диаг.):



Тогда взяли $m-2$ вершин. и ситуация перешла в ситуации для каждой стороны



По предположению, если разбилось, то там $\vdots(m-2)$ верш.



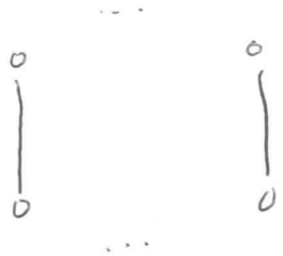
Тогда всего вершин $\underbrace{\vdots\, m-2} + \underbrace{\vdots\, m-2} + \dots + \underbrace{\vdots\, m-2} + (m-2) =$

$\to \,\vdots\, m-2$

Но это равно $k \,\not\vdots\, m-2$. Противоречие.

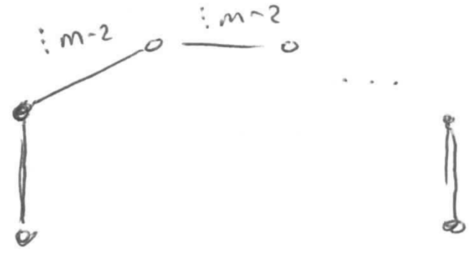
Предположение неверно. Ч.Т.Д.

Пусть можно разбить



Тогда этот хороший m уг. имеет в сумме $(m-4)$ вершин в ① и ② частях. $m \,\bar{\vdots}\, 2 \Rightarrow (m-4) \,\bar{\vdots}\, 2$, т.е. в ① и ② частях неравное кол-во вершин этого m уг.

По лемме для разбиения на m уг. дальше каждой стороне соств. кол-во вершин $\vdots (m-2)$;



Пусть a вершин в первой части ①
и b во 2-ой ②

Там равное кол-во вершин =>

$$\Rightarrow a + (m-2) + (m-2) + \ldots + (m-2) \underset{m-2}{\equiv} b + (m-2) + \ldots + (m-2);$$

$$a \underset{m-2}{\equiv} b, \text{ но } \left.\begin{array}{l} a \le m-4 < m-2 \\ b \le m-4 < m-2 \end{array}\right\} \Rightarrow a = b.$$

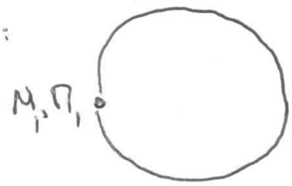
Противоречие.

Предположение неверно. Нельзя разбить.

Ответ: нельзя

$\boxed{9.6}$ Для д-ва достаточно предоставить стратегию Миши.

Вот она:

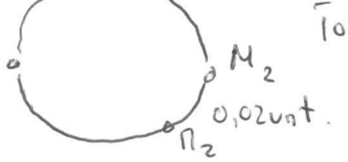


$\left.\begin{array}{l} V_M \text{ – скорость Миши} \\ V_П \text{ – скорость Пети} \end{array}\right\} V_M = 1{,}02 V_П$

Пусть S – длина окр., по которой они бегут (не умаляя общности) Петя, Миша – точки)

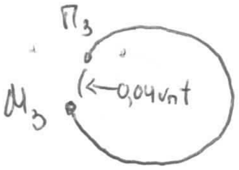
Тогда пусть $\frac{\frac{1}{2}S}{V_M} = t$, т.е. время, за которое Миша пробегает полкруга.

Миша, Петя бегут, пока Миша не пробежит полкруга:



Тогда расстояние между ними $V_M t - V_П t = 0{,}02 V_П t$

Миша меняет направление и снова бежит полкруга:



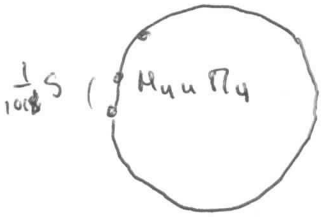
Тогда расстояние между ними уже $2\cdot 0{,}02 v_п t = 0{,}04 v_п t$

Тогда далее Миша бежит до встречи с Петей

(уже будет 2-ая, т.к. когда Миша повернул и далее побежал он должен был встретиться с Петей, т.к. ~~...~~ вернулся в точку старта, а Петя пробежал хотя бы что-то).

$$\frac{0{,}04v_п t}{v_п+v_м} = \frac{0{,}04 v_п t}{2{,}02 v_п} = \underbrace{\frac{2}{101}t}_{\text{до встречи}} \Rightarrow \text{Миша пробежал } v_м\cdot t\cdot\frac{2}{101} = \frac{1}{101}S.$$

Также поймем, что $0{,}04v_пt = \frac{0{,}04S}{2} = 0{,}02S \Rightarrow 0{,}02v_пt = 0{,}01S$.



Пете осталось пробежать $\frac{1}{101}S$. Он это сделает за (*)

Пусть после встречи Миша ещё будет бегать $\frac{1}{1000000}t$. Тогда развернется и побежит за Петей (может, т.к. пробежал больше половины круга после 1-ого поворота). Т.е. до след. встречи пройдет:

$$\frac{1}{1000000}t + \frac{(v_м+v_п)\cdot\frac{1}{1000000}t}{v_м-v_п} =$$

$$= \frac{1}{1000000} + \frac{2{,}02v_п\cdot\frac{1}{1000000}t}{0{,}02v_п} = \frac{102}{1000000}t$$

(*) $\frac{1}{101}S : v_п = \frac{S}{101v_п} = \frac{2v_мt}{101v_п} = \frac{2{,}02t}{101} = \frac{202t}{10100} = \frac{2t}{100} = 0{,}02t$

Сравним $\underbrace{\frac{102}{1000000}t < 0{,}02t}_{\text{очев}}$; $\Rightarrow$ Миша встретится с Петей в 3-ий раз до того как Петя пробежит 1-ый круг, если будет бежать так.

Стратегия верна. Получилось. Что и требовалось доказать.

$\boxed{9.10}$ $x_1, \dots, x_9 > 0$

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2^2} + \frac{x_2 - x_4}{x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_3^2} + \dots + \frac{x_8 - x_1}{x_8x_1 + 2x_9x_1 + x_9^2} + \frac{x_9 - x_2}{x_9x_2 + 2x_1x_2 + x_1^2} \overset{?}{\geqslant} 0$$

$$\frac{x_1}{x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2^2} + \dots + \frac{x_9}{x_9x_2 + 2x_1x_2 + x_1^2} \overset{?}{\geqslant} \frac{x_3}{x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2^2} + \dots + \frac{x_2}{x_9x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2},$$

что очевидно!

(ага, да, 100%)

Уважаемое жюри, давайте вы мне причислите 1б. за 9.10, а я буду до конца жизни желать вам и вашим детям удачи и здоровья!